Exemples d'algorithmes personnels d'addition

À partir de leurs expériences avec les nombres et quelques algorithmes, les élèves peuvent additionner en utilisant des algorithmes personnels. Selon l'enseignement qu'ils ont reçu, certains élèves ont recours au papier-crayon pour garder des traces de ce qu'ils font. Voici quelques exemples de stratégies de calcul.

Exemples

378 + 123

- Additionner de gauche à droite :

300 et 100 font 400.
70 et 20 font 90.
8 et 3 font 11.
Donc, 378 plus 123 égalent 501.

378 + 123
400 + 90 + 11 = 501

$$\begin{array}{r} 378 \\ +\ 123 \\ \hline 400 \\ 90 \\ +\ 11 \\ \hline 501 \end{array}$$

- Transformer le problème et compenser :

378, c'est 3 de plus que 375.
123, c'est 2 de moins de 125.
375 plus 125 égalent 500.
500 plus 3 moins 2, c'est égal à 501.
Donc, 378 plus 123 égalent 501.

378 + 123 = ?
375 + 125 = 500
500 + 3 − 2 = 501
378 + 123 = 501

- Compter par intervalles selon la valeur de position :

378 plus 1 centaine donnent 478.
478 plus 2 dizaines donnent 488, 498.
498 plus 3 unités donnent 499, 500, 501.
Donc, 378 plus 123 donnent 501.

378 + 100 = 478
478 + 10 = 488
488 + 10 = 498
498 + 1 = 499
499 + 1 = 500
500 + 1 = 501

- Décomposer un des nombres selon la valeur de position :

378 plus 100 égalent 478.
478 plus 20 égalent 498.
498 plus 3 égalent 501.
Donc, 378 plus 123 égalent 501.

$378 + 100 = 478$
$478 + 20 = 498$
$498 + 3 = 501$

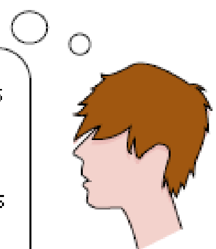
- Arrondir un nombre et compenser :

En arrondissant 378 à 380, je devrai compenser en enlevant 2 unités à 123; j'ai maintenant 380 plus 121, ce qui donne 501.

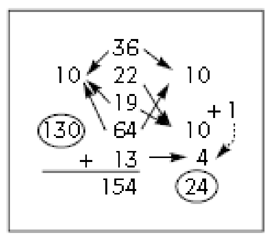
$378 + 2 = 380$
$123 - 2 = 121$
$380 + 121 = 501$

Pour déterminer la somme de plusieurs nombres, les élèves ont avantage à faire des regroupements. S'ils ont un bon sens des opérations, ils peuvent penser à des regroupements de 10, par exemple. Voici une stratégie de regroupement pour calculer 36 + 22 + 19 + 64 + 13 :

Pour les unités : 6 et 4 font 10, 9 plus 1 (qui vient du 2) égalent 10. Il me reste 1 (du 2) plus 3; donc, j'ai 24 unités. Ensuite, les dizaines : 6 plus 3 plus 1 égalent 10 et il me reste 2 plus 1 pour un total de 13 dizaines (130). Ma réponse est donc 154.



Raisonnement de l'élève



Voici l'algorithme usuel de l'addition qu'on retrouve souvent dans les manuels de mathématiques.

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 76 \\ +\ 38 \\ \hline 114 \end{array}$$

Il importe de rappeler que l'algorithme usuel n'est qu'une stratégie parmi tant d'autres et qu'il est essentiel que les élèves emploient une stratégie efficace pour résoudre un problème donné, d'où l'importance de connaître et de maîtriser une variété de stratégies de calcul. Pour découvrir d'autres algorithmes usuels, consulter le *Guide d'enseignement efficace de mathématiques, de la maternelle à la 6e année*, fascicule 5 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 36).

Exemples d'algorithmes personnels de soustraction

Exemples

588 – 234

- Décomposer des nombres selon les valeurs de position et effectuer des soustractions partielles :

500 moins 200 égalent 300.
80 moins 30 égalent 50.
8 moins 4 égalent 4.
Donc, 588 moins 234 donnent 354.

588 – 234 = ?
500 – 200 = 300
80 – 30 = 50
8 – 4 = 4
300 + 50 + 4 = 354

588 – 234 = ?
300 50 4
354

- Arrondir les nombres, soustraire et rajuster :

J'arrondis 588 à 600. Je soustrais 200 (400), ensuite 30 (370), puis 4 (366). J'enlève 12 (ajouté à 588 au début). J'obtiens donc 354.

588 – 234
600 – 234
600 – 200 = 400
400 – 30 = 370
370 – 4 = 366
366 – 12 = 354

- Soustraire par la gauche :

588 moins 200 égalent 388.
388 moins 30 égalent à 358.
358 moins 4 égalent 354.

588 – 234 = ?
588 – 200 = 388
388 – 30 = 358
358 – 4 = 354
588 – 234 = 354

- Décomposer les nombres :

Je sais que 500 moins 200 donnent 300, que 88, c'est 84 plus 4 et que 84 moins 34 donnent 50. Il ne me reste plus qu'à additionner 300, 4 et 50, ce qui donne 354.

588 – 234 = ?
300 88 – 34
4 + 84
84 – 34 = 50
300 + 4 + 50 = 354

Divers algorithmes usuels sont utilisés dans le monde pour effectuer des soustractions. Voici celui qu'on retrouve habituellement dans les manuels de mathématiques des écoles ontariennes :

$$\begin{array}{r} {}^{2}\cancel{3}\,{}^{11}\cancel{2}\,{}^{1}4 \\ -\ 189 \\ \hline 135 \end{array}$$

Cet algorithme n'est pourtant qu'une stratégie parmi tant d'autres. Il demeure important que les élèves choisissent une stratégie efficace qu'ils comprennent et puissent expliquer.

Exemples d'algorithmes personnels de multiplication

Exemples

$$28 \times 12$$

- **Utiliser un cas plus facile à calculer ou utiliser la distributivité :**

Puisque 28 est près de 30 et que $3 \times 12 = 36$, donc $30 \times 12 = 360$ Puisque j'ai rajouté 2 groupes de 12, je dois maintenant les retirer. Donc, $360 - 24 = 336$.

$$\begin{array}{r} 30 \times 12 = 360 \\ 2 \times 12 = 24 \\ \hline 28 \times 12 = 336 \end{array}$$

- **Décomposer le premier facteur selon la valeur de position, multiplier et additionner les produits partiels :**

28, c'est $20 + 8$. Puisque $2 \times 12 = 24$, donc $20 \times 12 = 240$ et $8 \times 12 = 96$. Donc, $240 + 96 = 336$.

$$\begin{array}{r} 20 \times 12 = 240 \\ 8 \times 12 = 96 \\ \hline 28 \times 12 = 336 \end{array}$$

- Utiliser les propriétés de la multiplication (distributivité et associativité) :

28 × 12, c'est (25 × 12) + (3 × 12).
25 × 12, c'est (25 × 4) × 3 ou 300
et 3 × 12, c'est 36. En tout, on a 336.

$$\begin{array}{c} 28 \times 12 \\ (25 + 3) \times 12 \\ (25 \times 12) + (3 \times 12) \\ 25 \times 4 \times 3 + 36 \\ 100 \times 3 + 36 \\ 336 \end{array}$$

Voici l'algorithme usuel de la multiplication qu'on retrouve souvent dans les manuels de mathématiques.

$$\begin{array}{r} {}^{4} \\ 37 \\ \times \quad 6 \\ \hline 222 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1\,\cancel{2}} \\ 34 \\ \times \quad 45 \\ \hline 170 \\ +\ 1360 \\ \hline 1530 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{3\,2} \\ {}^{\cancel{4}\,\cancel{3}} \\ 354 \\ \times \quad 169 \\ \hline 3186 \\ 21240 \\ +\ 35400 \\ \hline 59826 \end{array}$$

Voici deux exemples de stratégies de multiplication qui pourraient être présentées pour susciter l'intérêt des élèves et exercer leur raisonnement mathématique par rapport aux opérations.

Exemple 1

La première méthode, dite du paysan russe, est une forme de compensation. Voici comment on multiplie 28 × 12 selon cette méthode :

On divise le premier facteur par 2 et on multiplie le deuxième facteur par 2 pour obtenir 14 × 24.

On recommence pour obtenir 7 × 48.

On recommence pour obtenir 3,5 × 96.

$$28 \times 12 \overset{\div 2}{\underset{\times 2}{=}} 14 \times 24 \overset{\div 2}{\underset{\times 2}{=}} 7 \times 48 \overset{\div 2}{\underset{\times 2}{=}} 3{,}5 \times 96 \xrightarrow{(-48)} 3 \times 96 \overset{\div 2}{\underset{\times 2}{=}} 1{,}5 \times 192 \xrightarrow{(-96)} 1 \times 192$$

Les trois premières expressions, soit 28 × 12, 14 × 24 et 7 × 48, ont le même produit, puisque dans chaque cas, on a divisé le premier facteur par 2 et compensé en multipliant le deuxième facteur par 2.

Or, on remplace la dernière opération par 3×96, ce qui a pour effet de diminuer le produit de $0,5 \times 96$, soit la moitié de 96 (48). On devra donc ajouter 48 à la fin.

On divise de nouveau le premier facteur par 2 et on multiplie le deuxième par 2 pour obtenir une expression équivalente, soit $1,5 \times 192$.

Une fois de plus, on laisse tomber la partie décimale, soit 0,5, pour ne conserver que l'expression 1×192, ce qui diminue le produit de $0,5 \times 192$, soit la moitié de 192 (96). On devra donc ajouter 96 à la fin.

Ainsi, l'expression 1×192 est égale à 192. Ce produit, avec les produits qu'on a enlevés, est égal au produit de l'expression initiale. Donc, 28×12 est égal à $192 + 48 + 96$, soit 336.

Exemple 2

Le deuxième exemple est d'origine égyptienne. Pour multiplier, on fait appel au concept de doublement et à la décomposition d'un des facteurs. Ainsi, pour calculer 12×28, on double 28, on double le résultat, et ainsi de suite. On s'arrête lorsque l'expression suivante (16×28) dépasse celle que l'on veut, soit 12×28.

On obtient ainsi :

$$1 \times 28 = 28$$

$$2 \times 28 = 56$$

$$4 \times 28 = 112$$

$$8 \times 28 = 224$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(4 \times 28) + (8 \times 28) = 12 \times 28 \\ 112 + 224 = 336\end{array}}$$

Des expressions ci-dessus, on peut penser qu'on a 1 groupe de 28, 2 groupes de 28, 4 groupes de 28 et 8 groupes de 28. On veut choisir un total de 12 groupes de 28. On choisit donc 4 groupes plus 8 groupes. Ainsi, on détermine que $12 \times 28 = 336$.

Une stratégie de multiplication d'origine arabe, basée sur un système de numération positionnel, est démontrée dans le module *Opérations fondamentales* sur le site atelier.on.ca.

Exemples d'algorithmes personnels de division

Exemples

$372 \div 6$

- **Décomposer le dividende :**

372, c'est 360 + 12. Puisque $6 \times 6 = 36$, alors $6 \times 60 = 360$. Puisque $12 \div 6 = 2$, la réponse est 60 + 2 ou 62.

$372 \div 6 = ?$

$$372 = \underbrace{360}_{60 \times 6} + \underbrace{12}_{2 \times 6}$$

$60 + 2 = 62$

$372 \div 6 = 62$

- **Décomposer le dividende selon la valeur de position :**

372, c'est 300 + 70 + 2. Or, $6 \times 50 = 300$ et $70 \div 6$ est égal à 10 reste 10. Alors 12 (de 10 + 2) $\div 6 = 2$. On a donc 50 + 10 + 2, soit 62.

$372 = 300 + 70 + 2$

$300 \xrightarrow{\div 6} 50$

$70 \xrightarrow{\div 6} 10 \text{ r } 10$

$10 + 2 = 12 \xrightarrow{\div 6} 2$

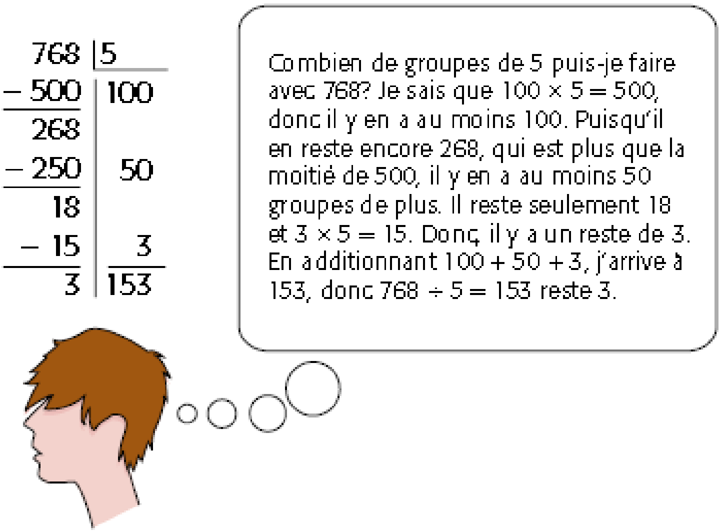
$372 \div 6 = 62$

Puisque la division peut être associée à une soustraction répétée, les élèves l'emploient souvent pour résoudre un problème de division. Par exemple, si on possède 120 bonbons et qu'on en donne 15 par ami, la soustraction nous permet de conclure que 8 amis vont en recevoir.

120	
− 15	1
105	
− 15	2
90	
− 15	3
75	
− 15	4
60	
− 15	5
45	
− 15	6
30	
− 15	7
15	
− 15	8
0	

Voici une utilisation de l'algorithme qui correspond à une compréhension des étapes :

$$
\begin{array}{r|l}
5\overline{)\,768} & \\
-\ 500 & 100 \\
\hline
268 & \\
-\ 250 & 50 \\
\hline
18 & \\
-\ 15 & 3 \\
\hline
3 & 153
\end{array}
\qquad \text{ou} \qquad
\begin{array}{r|l}
768 & \underline{5} \\
-\ 500 & 100 \\
\hline
268 & \\
-\ 250 & 50 \\
\hline
18 & \\
-\ 15 & 3 \\
\hline
3 & 153
\end{array}
$$

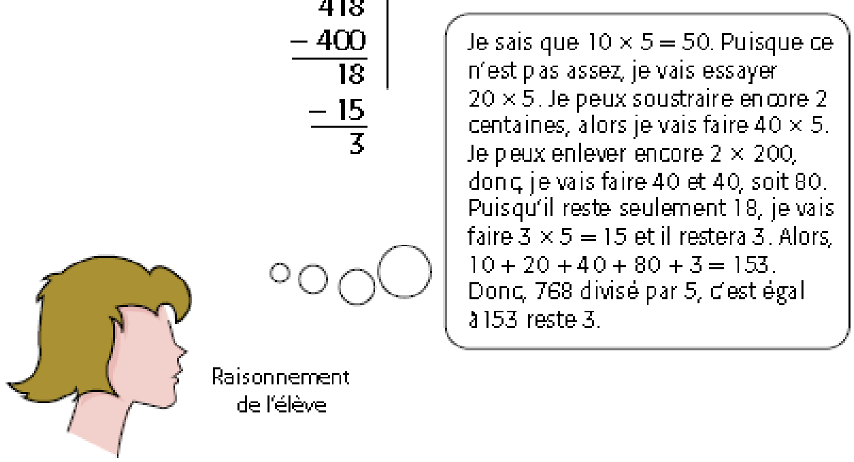


Raisonnement de l'élève

Dans ce cas, l'élève a choisi d'écrire à côté les nombres de groupes qu'il estimait pouvoir faire (100, 50, 3). Les élèves peuvent choisir d'écrire ces nombres ailleurs. D'ailleurs, s'ils utilisent l'algorithme de la façon la plus logique pour eux, il devient un algorithme personnel.

Certaines élèves pourraient arriver à effectuer l'opération avec un raisonnement semblable, tout en prenant plusieurs étapes de plus, comme dans l'exemple suivant. Il est important que les élèves comprennent les gestes qu'ils posent, alors que l'algorithme usuel est souvent enseigné comme une simple recette.

$$
\begin{array}{r}
10 + 20 + 40 + 80 + 3 = 153 \\
5\,\overline{)\,768} \\
\underline{-\,50} \\
718 \\
\underline{-\,100} \\
618 \\
\underline{-\,200} \\
418 \\
\underline{-\,400} \\
18 \\
\underline{-\,15} \\
3
\end{array}
\qquad \text{ou} \qquad
\begin{array}{r|l}
768 & 5 \\ \hline
\underline{-\,50} & 10 + 20 + 40 + 80 + 3 = 153 \\
718 & \\
\underline{-\,100} & \\
618 & \\
\underline{-\,200} & \\
418 & \\
\underline{-\,400} & \\
18 & \\
\multicolumn{1}{r}{\underline{-\,15}} & \\
\multicolumn{1}{r}{3} &
\end{array}
$$



Il importe aussi que les élèves aient vu plusieurs notations de la division afin de pouvoir facilement passer de l'une à l'autre et d'élargir leur banque de stratégies personnelles. Par exemple, pour exprimer $360 \div 24$, $\frac{360}{24}$, $24\overline{)360}$ ou $360\,\underline{|\,24}$, il arrive que des élèves ignorent où positionner le dividende, le diviseur et le quotient. Cette situation se produit moins souvent si l'algorithme émane des élèves, car ils comprennent mieux ce qui se passe.